

Тема 1.1. Алгебра высказываний

Определение. **Высказывание** – повествовательное предложение, относительно которого известно, что оно либо истинно, либо ложно.

Примеры:

1) «Земля дальше от Солнца, чем Венера» является истинным высказыванием.

2) « $1+5 > 15$ » - ложное высказывание.

Не всякое предложение является высказыванием:

а. Вопросительное предложение – «Какого цвета же стена?»;

б. Восклицательное предложение – «Ура!»;

в. Повествовательное предложение – «Его глаза голубые»; « $x^2 - x - 12 = 0$ »;

г. Определения – «Две прямые не имеющие общих точек и лежащие в одной плоскости параллельны»

Предложения а – г не являются высказываниями, так как не содержат никакого значения истинности. Высказывания делятся на простые и сложные. Высказывание будем считать простым (элементарным), если никакая его часть не является высказыванием.

Высказывания будем обозначать строгими латинскими буквами $a, b, c, \dots, x, y, z$. Для обозначения истинности используются символы «и» и «1», а для обозначения ложности – символы «л» и «0». Из простых высказываний с помощью небольшого числа операций строятся сложные высказывания.

Логические операции. Таблица истинности.

Логическая операция может быть описана таблицей истинности, указывающей, какие значения примет сложное выражение при всех возможных значениях простых выражений.

Логические операции имеют специальные названия и обозначаются следующим образом:

Название	Прочтение	Обозначение
Отрицание, инверсия	не, наверно, что	$\bar{}, \neg, \neg$
Конъюнкция, логическое умножение	и, а, но, хотя	$\&, \bullet, \wedge$
Дизъюнкция, нестрогая дизъюнкция, логическое сложение	или	$\vee, +$
Разделительная (строгая) дизъюнкция	либо (или или)	$\oplus, \Delta$
Импликация, следование	если..., то, следует	$\Rightarrow, \rightarrow$
Эквивалентность, эквиваленция, равнозначность	тогда и только тогда, когда	$\Leftrightarrow, \sim, \equiv, \leftrightarrow$

Введем перечисленные логические операции формальным образом.

1. Операция отрицания.

Отрицанием высказывания a называется новое высказывание, которое истинно, когда x - ложно, и ложно, когда x - истинно.

Логическая операция отрицание задается следующей таблицей истинности:

a	$\bar{x}$
0	1
1	0

Пример 1. a : «Число 124 – четное».

Отрицание $\bar{a}$: «Неверно, что число 124 – четное».

Пример 2. b : «Число 125 делится на 5».

$\bar{b}$: «Число 125 не делится на 5».

Пример 3. d : «Все студенты имеют дома компьютеры.»

$\bar{d}$: «Некоторые студенты не имеют дома компьютеры».

2. Операция конъюнкции.

Конъюнкцией высказываний x и y называется новое высказывание $x \wedge y$, которое истинно только тогда, когда оба высказывания x и y истинны, и ложно, когда хотя бы одно из x и y ложно.

Таблица истинности конъюнкции:

x	y	$x \wedge y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Пример 4. x : «8 делится на 4».

y : «8 делится на 2».

Конъюнкция $x \wedge y$: «4 делится на 4 и 2».

Пример 5. a : «Студент Иванов любит математику».

b : «Студент Иванов не любит физику».

Конъюнкция $a \wedge b$: «Студент Иванов любит математику, но не любит физику».

3. Операция дизъюнкции.

Дизъюнкцией (логическим сложением) двух высказываний x и y называется новое высказывание $x \vee y$, которое считается истинным, если хотя бы одно из высказываний x и y истинно, и ложным, если оба они ложные.

Таблица истинности дизъюнкции:

x	y	$x \vee y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Пример 6. x : «число 2 делит число 6».

y : «число 6 больше, чем число 4».

Дизъюнкция $x \vee y$: «Число 2 делит число 6 или число 6 больше, чем число 4».

Союз «или» может применяться в речи и в другом «исключающем» смысле. Тогда он соответствует другому высказыванию – разделительной, или строгой дизъюнкции.

Исключающему «или» соответствует следующая таблица истинности:

x	y	$x \oplus y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Для разделительной дизъюнкции часто используют связку «либо».

Пример 7. a : «Кошка охотится за мышами».

b : «Кошка спит на окне».

$a \oplus b$: «Кошка охотится за мышами, либо спит на окне».

4. Операция импликации.

Импликацией двух высказываний x и y называется новое высказывание $x \rightarrow y$, которое считается ложным, когда x истинно, а y ложно, и истинным во всех остальных случаях.

Таблица истинности импликации:

x	y	$x \rightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Высказывание x называется условием, посылкой или антецедентом, высказывание y - следствием, заключением или консеквентом.

Пример 8. x : «число 136 делится на 3».

y : «число 136 – составное».

Импликация $x \rightarrow y$: «Если число 136 делится на 3, то оно составное».

Пример 9. a : « $2 > 3$ ».

b : «змеи летают».

Импликация $a \rightarrow b$: «Если $2 > 3$, то змеи летают».

Это высказывание в соответствии с отрицанием является истинным несмотря на то, что в нем посылка и следствие не связаны по содержанию.

5. Операция эквиваленции.

Эквиваленцией двух высказываний x и y называется новое высказывание $x \leftrightarrow y$, которое истинно, когда оба высказывания x и y либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, и ложно во всех остальных случаях.

Пример 10. x : «Число 3153 делится на 3».

y : «Сумма цифр числа 3153 делится на 3».

Эквиваленция $x \leftrightarrow y$: «Число 3153 делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр его делится на 3».

Логическая наука, занимающаяся высказываниями, называется алгеброй высказываний. Название это становится понятным, если « $\wedge$ » называть произведением, а « $\vee$ » - сложением. Мы как бы перемножаем и складываем высказывания. Алгебра высказываний строится так же, как и многие другие разделы математики: арифметика, алгебра, геометрия и т.д.

Формулы алгебры высказываний.

С помощью логических операций над высказываниями можно строить различные новые, более сложные высказывания. Определим понятие формулы логики высказываний. Понятие логической формулы является формализацией понятия сложного высказывания.

Определение:

1. Любое высказывание (высказывательная переменная) – формула.
2. Если A и B формулы, то $(\bar{A}), (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ – тоже формулы.

При построении формулы используют скобки (...). Условимся внешние скобки опускать, к примеру, формулу $((A \vee B) \wedge C)$ будем записывать $(A \vee B) \wedge C$. Существуют и другие правила, позволяющие не ставить лишние скобки. Например, конъюнкция выполняется первой, дизъюнкция – второй, импликация и эквиваленция равноправны и выполняются последними. Каждой формуле при заданных значениях входящих в нее переменных приписывается одно из двух значений 0 или 1. Для формул составляется таблица истинности. Если формула состоит из n -элементов, то ее таблица истинности содержит 2^n строк. Приписывание значений истинности или ложности высказываниям, входящим в формулу, называется интерпретацией этих высказываний. Под интерпретацией формулы понимается приписывание значений истинности высказываниям, входящим в эту формулу.

Пример 11. Составить таблицу для формулы $(x \rightarrow y) \wedge (x \vee \bar{y})$

Решение:

x	y	$x \rightarrow y$	$\bar{y}$	$x \vee \bar{y}$	$(x \rightarrow y) \wedge (x \vee \bar{y})$
1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

Все формулы алгебры логики делятся на три класса:

1. Тавтология.(тождественно истинные)
- 2.Тождественно ложные.
3. Выполнимые.

Определение. Формула A называется **тавтологией** (или тождественно истинной), если та истина при всех значениях высказывательных переменных, входящих в эту формулу.

Определение . Формула A называется **тождественно ложной**, если она ложна при всех значениях высказывательных переменных, входящих в эту формулу.

Определение. Формула A называется **выполнимой**, если она принимает значение единицы, хотя бы на одном наборе, входящих в нее переменных и не является тождественно истинной.

Пример 12. Рассмотрим формулу $A = (x \rightarrow y) \rightarrow ((x \rightarrow \bar{y}) \rightarrow \bar{x})$

Построим таблицу истинности этой формулы

x	y	$x \rightarrow y$	$\bar{y}$	$\bar{x}$	$x \rightarrow \bar{y}$	$(x \rightarrow \bar{y}) \rightarrow \bar{x}$	A
1	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1

Анализируя столбец последний убеждаемся, что формула A является тавтологией.

Пример 13.Показать выполнимость формулы $B = (x \rightarrow y) \rightarrow (y \rightarrow x)$

Построим таблицу истинности

x	y	$x \rightarrow y$	$y \rightarrow x$	B
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Анализируя столбец значений истинности формулы B , убеждаемся, что формула B является выполнимой.

Равносильные формулы.

Определение.: Две формулы A и B называются **равносильными**, если они принимают одинаковые логические значения при любом наборе значений входящих в формулу элементарных высказываний.

Равносильность обозначается знаком « $\equiv$ ». Для преобразования формул в равносильные важную роль играют основные равносильности, выражающие одни логические операции через другие, равносильности, выражающие основные законы алгебры логики.

Для любых формул A, B, C справедливы равносильности.

I. Основные равносильности

- | | | | |
|------|---|---|---------------------------------|
| 1.1 | $A \wedge B \equiv A$ | } | закон идемпотентности |
| 1.2 | $A \vee A \equiv A$ | | |
| 1.3 | $A \wedge 1 \equiv A$ | | 1-истина |
| 1.4 | $A \vee A \equiv 1$ | | |
| 1.5 | $A \wedge 0 \equiv 0$ | | 0-ложь |
| 1.6 | $A \vee A \equiv A$ | | |
| 1.7 | $A \wedge \bar{A} \equiv 0$ | | закон противоречия |
| 1.8 | $A \vee \bar{A} \equiv 1$ | | закон исключенного третьего |
| 1.9 | $\overline{\bar{A}} \equiv A$ | | закон снятия двойного отрицания |
| 1.10 | $A \wedge (B \wedge A) \equiv A$ | } | закон поглощения |
| 1.11 | $A \vee (B \vee A) \equiv A$ | | |
| 1.12 | $A \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee \bar{B})$ | } | формулы расщепления |
| 1.13 | $A \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge \bar{B})$ | | |
| 1.14 | $(A \vee B) \wedge (A \vee \bar{B}) \equiv A$ | } | закон склеивания |
| 1.15 | $(A \wedge B) \vee (A \wedge \bar{B}) \equiv A$ | | |

II. Равносильности, выражающие одни логические операции через другие.

2.1 $A \rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B$

$$2.2 \quad A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

$$2.3 \quad A \leftrightarrow B \equiv (\bar{A} \vee B) \wedge (\bar{B} \vee A)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2.4 \quad \overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B} \\ 2.5 \quad \overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B} \end{array} \right\} \text{ закон де Моргана}$$

$$2.6 \quad A \wedge B \equiv \overline{\bar{A} \vee \bar{B}}$$

$$2.7 \quad A \vee B \equiv \overline{\bar{A} \wedge \bar{B}}$$

III. Равносильности, выражающие основные законы алгебры логики.

$$\left. \begin{array}{l} 3.1 \quad A \wedge B \equiv B \wedge A \\ 3.2 \quad A \vee B \equiv B \vee A \end{array} \right\} \text{ коммутативный закон}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3.3 \quad A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C \\ 3.4 \quad A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C \end{array} \right\} \text{ ассоциативный закон}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3.5 \quad A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ 3.6 \quad A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \end{array} \right\} \text{ дистрибутивный закон}$$

Любая из равносильностей легко может быть доказана с помощью таблицы истинности. Докажем первый закон де Моргана. Построим таблицу истинности для левой и правой части закона.

A	B	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \vee \bar{B}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1

Если результирующие столбцы совпали, то формулы, стоящие в левой и правой части закона, равносильны.

Отношение равносильности есть отношение эквивалентности. Оно рефлексивно: $A \equiv A$; симметрично, т.к. для любых двух формул A и B : если

$A \equiv B$, то $B \equiv A$; транзитивно : если $A \equiv B$, $B \equiv C$, то $A \equiv C$. Таким образом, эквивалентные формулы можно рассматривать как разные формулы записи одной и той же формулы. Используя равносильности I, II, III групп, можно формулу заменить равносильной ей формулой. Такие преобразования формул называются равносильными. Равносильные преобразования используются для доказательства равносильностей; для приведения формул к заданному виду, для упрощения формул.

Пример 14. Упростить формулу

$$\overline{(x \vee y \rightarrow x \vee y)} \vee y \equiv \overline{\overline{(x \vee y \vee x \vee y)}} \wedge y \equiv_{I(9)} (x \vee y \vee x \vee y) \wedge y \equiv_{I(2)} (x \vee y) \wedge_{III(1)} y \equiv_{I(10)} y$$

При упрощении были использованы равносильности:

II (1), I (9), I (2), III (1), I (10).

Пример 15. Закон поглощения можно вывести при помощи равносильностей

I (3), III (5), I (4)

$$A \vee (A \wedge B) \equiv_{I(3)} (A \wedge 1) \vee (A \wedge B) \equiv_{III(5)} A \wedge (1 \vee B) \equiv_{I(4)} A \wedge 1 \equiv_{I(3)} A$$

Вопросы и задания.

1. Среди следующих предложений выделите те, которые являются высказываниями, и установите, если это возможно, истинны они или ложны.

- 1) Число 2 является делителем числа 105.
- 2) На улице идет снег.
- 3) Меню в программе – это список возможных вариантов.
- 4) Как пройти в библиотеку?
- 5) Физика – интересный предмет.
- 6) Москва – столица России.
- 7) «Да здравствуют музы!»
- 8) Студент ГСТ.
- 9) Алюминий тяжелее свинца.

2. Сформулируйте отрицание следующих высказываний, укажите значение истинности данных высказываний и их отрицаний.

- 1) Все простые числа нечетные.

2) $2 > 3$.

3) Австралия – остров.

4) 24 есть составное число.

5) $2 + 8 = 10$.

3. Определите значение истинности следующих высказываний:

1) Гуково расположен на берегу реки Ока и в нем проживает 150 тыс. человек.

2) 11 – простое число и 15 – составное число.

3) 11 – простое число или 15 – составное число.

4) Если 15 делится на 3, то 12 – составное число.

4. Даны два высказывания:

a : «число 25 является делителем 125»,

b : «число 25 – составное число».

В чем заключаются высказывания:

$\bar{a}$, $\bar{b}$, $a \vee b$, $a \wedge b$; $a \vee \bar{b}$, $a \rightarrow \bar{b}$; $p \leftrightarrow g$, $\overline{p \rightarrow g}$.

5. Определить, являются ли данная последовательность формулой:

1) $(A \wedge B)$;

2) $(A \wedge B) \wedge \bar{A}$;

3) $((A \rightarrow B) \wedge \bar{A})$;

4) $A \wedge B \rightarrow C$;

5) $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow D$.

6. Составить таблицы истинности для следующих формул и указать, какие из формул являются выполнимыми, какие – тождественно истинными, какие – тождественно ложными:

1) $P \rightarrow (Q \rightarrow P \wedge Q)$;

2) $A \leftrightarrow A \vee \bar{A}$;

3) $A \vee B \rightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$;

4) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow \bar{Q}) \rightarrow \bar{P})$;

5) $((P \rightarrow Q \vee R) \rightarrow (\bar{Q} \rightarrow \bar{P})) \rightarrow \bar{Q}$;

6) $(A \vee B) \rightarrow ((\bar{A} \wedge \bar{B}) \vee (A \wedge B)).$

7. Какие из следующих формул являются тавтологиями?

1) $\overline{A \wedge \bar{A}};$

2) $A \rightarrow (B \rightarrow A);$

3) $(A \wedge B) \rightarrow A.$

8. Какие из рассмотренных логических законов аналогичны законам алгебры чисел, а какие нет?

9. Доказать следующие равносильности:

1) $\overline{A \rightarrow B} \equiv A \wedge \bar{B};$

2) $A \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C);$

3) $A \vee (B \wedge A) \equiv A.$